Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Matemáticas discretas

Miércoles 9 de mayo de 2018 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

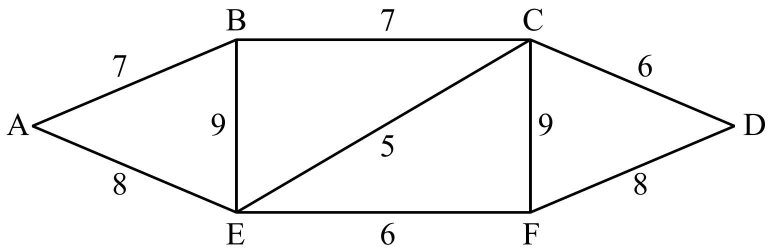
2218 – 7227

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 10]

Considere el siguiente grafo ponderado G.



(a) Indique qué característica de G garantiza que

(i) G contenga un sendero euleriano;

(ii) G no contenga un circuito euleriano. [2]

(b) Escriba un sendero euleriano que haya en G. [2]

(c) (i) Indique cuál es el problema del “cartero chino”.

(ii) Empezando y acabando en B, halle una solución para el problema del “cartero chino” en G.

(iii) Calcule el peso total de la solución. [6]

2. [Puntuación máxima: 8]

(a) Indique qué dice el pequeño teorema de Fermat. [2]

(b) Considere la congruencia lineal $ax \equiv b(\bmod p)$, donde $a, b, p, x \in \mathbb{Z}^+$, p es primo y a no es múltiplo de p.

(i) Utilice el pequeño teorema de Fermat para mostrar que $x \equiv a^{p-2}b(\bmod p)$.

(ii) A partir de lo anterior, resuelva la congruencia lineal $5x \equiv 7(\bmod 13)$. [6]

3. [Puntuación máxima: 11]

Considere el grafo bipartito completo $\kappa_{3,3}$.

(a) (i) Dibuje $\kappa_{3,3}$.

(ii) Muestre que $\kappa_{3,3}$ contiene un ciclo hamiltoniano.

(iii) Dibuje $\kappa_{3,2}$ y explique por qué no contiene un ciclo hamiltoniano. [4]

(b) (i) En el contexto de la teoría de grafos, indique qué dice el lema del apretón de manos.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que no puede existir un grafo G que tenga una secuencia de grados $2, 3, 3, 4, 4, 5$. [3]

Sea T un árbol con v vértices, donde $v \geq 2$.

(c) Utilice el lema del apretón de manos para demostrar que T tiene al menos dos vértices de grado uno. [4]

4. [Puntuación máxima: 6]

(a) Muestre que $\mathrm{mcd}(4k+2\,, 3k+1) = \mathrm{mcd}(k-1\,, 2)$, donde $k \in \mathbb{Z}^+, k > 1$. [4]

(b) Indique el valor de $\mathrm{mcd}(4k+2\,, 3k+1)$ para

(i) valores de k enteros, positivos e impares;

(ii) valores de k enteros, positivos y pares. [2]

5. [Puntuación máxima: 15]

La serie de Fibonacci se puede describir mediante la relación de recurrencia $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ donde $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

(a) Escriba la ecuación auxiliar y utilícela para hallar una expresión para f_n en función de n. [7]

Se sabe que $\alpha^2 = \alpha + 1$ donde $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Para números enteros $n \geq 3$, utilice la inducción fuerte aplicada a la relación de recurrencia $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para demostrar que $f_n > \alpha^{n-2}$. [8]